УДК 550.831+550.838

Відновлення контактної границі в шаруватому середовищі

© ***Ю.І. Дубовенко*, 2002**

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна

Надійшла “   ” червня 2002 р.

Представлено членом редколегії В.І. Старостенком

На класі Нумерова нелінійну контактну задачу з задовільною точністю апроксимовано розв’язками лінійних інтегральних рівнянь першого роду двох типів. На їх основі зформульовано задачі коректного відновлення контактної поверхні за значеннями поля на майже необмежених і *істотно обмежених* множинах. Для розв’язання цих рівнянь запропоновано стійкі ітераційні процеси та схему прискорення їх збіжності.

Nonlinear contact problem on the Numerov set is approximated with sufficient accuracy by the solutions of two types of linear integral equations of 1-st kind. On its basis problem of correct contact surface renovation by the data field on almost infinited and *essentially restricted* sets are stated. Stable iteration processes for its solution, convergency acceleration scheme are offered.

При інтерпретації даних потенціальних полів з метою вивчення глибинної будови Землі визначальною ланкою є розв’язок зворотніх структурних задач потенціалу [1-4]. Шуканими параметрами в них є характер поведінки й глибина границь розділу шарів, на яких функції щільності (намагніченості) зазнають розриву. Математично розв’язок таких задач зводиться до розв’язку інтегральних рівнянь 1-го роду й у цілому нестійкий.

Загалом нелінійну зворотню задачу логарифмічного потенціалу для контактної поверхні зведено до розв’язання нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона

$$\zeta(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\frac{(\xi-x)^2+\zeta^2(x)}{(\xi-x)^2+\zeta^2(\xi)}d\xi=u(x),\ u(x)=\frac{U_y(x,0)}{2\pi f\sigma} \qquad (1)$$

яке відрізняється від рівняння Б.В. Нумерова [5] наявністю замість *середньої глибини h* до контакту значення $\zeta(x)$ цього контакту у фіксованій точці *x*; про можливість такої підстановки згадував О.А. Шванк [6]. Розв’язок наведеного рівняння знайдено на компактному структурному класі – так званому класі Страхова – *перетині класу функцій щільності, обмежених і локально інтегрованих майже всюди в необмеженій замкнутій області, що містить тяжіючі маси, і класу неперервних за Гельдером* (*тобто обмежених*) *функцій контакту*; на цьому класі розв’язок нелінійної контактної задачі (1) існує, єдиний і стійкий [3, 4]. Поведінку рівняння (1) в комплексній площині вивчено в працях [7, 8]. Одначе, в задачах типу (1) точний розв’язок досягається виняткова при заданні значень поля на необмежених інтервалах, тоді як у польових умовах елементи поля вимірюють на істотно коротких профілях. Отже, актуальним є вивчення контактної задачі за умов задання вхідних даних на *істотно обмежених множинах*

В зв’язку з цим розглянемо лінеаризований варіант задачі [9], який дозволяє відновити контакт за значеннями поля на *істотно обмежених* інтервалах за допомогою заміни інтегрального рівняння з повільно спадаючим ядром Пуассона рівнянням зі швидко спадаючим ядром. Наведемо способи її коректного розв’язання з врахуванням результатів [7, 10, 11].

Зазначимо, що поняття “*істотно обмеженого інтервалу*” запозичено з роботи [12] з наступним уточненням: нехай потрібно визначити в рівномірній дискретній мережі точок x_k з постійним кроком Δx деякий фрагмент $\zeta(x), x\in[c_1,c_2]$ контактної поверхні $\zeta(x)$ за виміряними з *відомою точністю* $\|u(x)-u_\delta(x)\|_c\le\delta$ на інтервалі $[c_0,c_3]\supset[c_1,c_2]$ значеннями поля $u(x)$. В процесі розв’язання цієї задачі з допомогою деякого ітераційного процесу [3] на основі рівняння (1) потрібно обчислити таке значення межі інтегрування a прямого оператора (1), при якому похибка його апроксимації не перевищить величини, кратної похибці поля $\|\varepsilon(x;n)\|+\|\varepsilon(x;a)\|\le l\delta,\ l\le 5$, де $\varepsilon(x,a)$ – точність скінченновимірного проектування, $\varepsilon(x,n)$ – точність чисельного інтегрування (додатковий член формули чисельного інтегрування). Як-

що при цьому поле $u_\delta(x)$ задано на інтервалі $[c_0, c_3]$ так, що виконується вкладання $[c_0 - a - \Delta x/2, c_3 - a - \Delta x/2] \geq [c_1, c_2]$, то інтервал будемо називати майже необмеженим, в іншому разі – *істотно обмеженим*. У першому випадку за співвідношенням (1) непогано відновлюється контакт, у іншому – надійно відновити контакт з допомогою ітерацій з ядром Пуассона неможливо і необхідно застосовувати інші, більш швидкозбіжні схеми обчислень[1].

Моделлю геологічної будови для вищезгаданої задачі є два зоряні відносно нескінченно віддаленої точки однорідні циліндричні шари різної щільності σ, що залягають один над одним й обмежені смугою

$$\Pi = \{< x, \zeta >: -\infty < x < \infty; h_1 < \zeta(x) \leq h_0\} , \tag{2}$$

де $h^- = \inf \zeta(x)$, $h^+ = \sup \zeta(x)$ – глобальні екстремуми контакту $\zeta(x)$, а постійні $h_1 = \inf\{h^-\}$ і $h_0 = \sup\{h^+\}$ описують множину контактів $\zeta(x)$ зі смуги (2) за умови $0 < h_1 \leq \zeta(x) \leq h_0$, $x \in R^{(1)}$

Якщо в класі Страхова $St(1, \Pi)$ [9] виділити на підставі співвідношень

$$\omega(\zeta) < \zeta(x),\ \omega(\zeta) = h^+ - h^-, x \in R^{(1)}, \tag{3}$$

$$0.6h \leq |\zeta(x)| \leq 1.4h,\ 0 < h^- \leq h \leq h^+ , \tag{4}$$

що обмежують "коливання" $\omega(\zeta)$ контакту, деякий компактний клас Нумерова $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ то досить легко показати, що для контактних границь, описаних функціями з цього класу, головну роль у гравітаційному притяганні підземних мас відіграє перша складова в лівій частині рівняння (1) , а друга – лише роль деякої малої поправки до неї. [11], Наслідком цього твердження є можливість подати на класі $Nu^{(1,\alpha)}(1, \Pi)$ нелінійне рівняння (1) з точністю $\zeta^2(x) = [\eta(x) - h]^2$ лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма 1-го роду з ядром Пуассона

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2}\zeta(\xi)d\xi = v(x), v(x) = u(x) - h, x \in R^{(1)} \ , \tag{5}$$

причому розв'язок $\zeta(x), x \in R^{(1)}$ цього рівняння на класі Нумерова існує і єдиний при заданні правої частини на довгому профілі.

Досліджувана задача полягає у відновленні контакту при обмеженнях (2-4) за полем, заданим на "необмежених" $[c_0, c_3]$ і *істотно обмежених* $[c_1, c_2]$ множинах]. Для відновлення контакту при заданні поля на *істотно обмежених* множинах рекомендується еквівалентне рівнянню (5) лінеаризоване рівняння зі швидко спадаючим ядром Шварца [11]:

$$\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2} \left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1} \zeta(\xi)d\xi = w(x) \ , \tag{6}$$

$$w(x) = v(x) - \frac{1}{4\pi h}\int_{c_1}^{c_2} \left(\mathrm{ch}\frac{\pi(t - x)}{2h}\right)^{-1} dt \int_{c_0}^{c_3} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2} v(\xi)d\xi$$

Його розв'язок існує (як наслідок лінеаризації) і єдиний. Однак це не єдиний шлях визначення наближень $\zeta(x,h)$: при належності шуканого розв'язку до компакту $\zeta(x) \in Nu^{(1.\alpha)}(1, \Pi)$ лінійне наближення контакту $\zeta(x,h)$ отримуємо як суму розв'язків $\zeta(x,h) = S^+(x,h) + S^-(x,h)$ лінійних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2h}\int_{c_1}^{c_2} S^+(\xi,h)\left(\mathrm{ch}\frac{\pi(\xi - x)}{2h}\right)^{-1} d\xi = u(x) \ , \ \frac{1}{2h}\int_{c_1}^{c_2} S^-(\xi,h)\,\mathrm{th}\frac{\pi(\xi - x)}{2h} d\xi = u(x) \tag{7}$$

Існує ще один варіант знаходження наближення $\zeta(x,h)$ як розв'язку рівняння

$$\zeta(x,h) = 2S^+(x,h) - \frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3} \frac{h}{h^2 + (\xi - x)^2} v(\xi)d\xi \ , \tag{8}$$

---

[1] Одну з таких схем для рівняння (1) якраз і наведено в роботі [12].

де $S^{+}(x,h)$ визначено з першого рівняння системи (7). Такий альтернативний розв'язок відрізняється від точного розв'язку $\zeta(x)$ рівняння (1) не більше за квадрат відхилення $\zeta(x)=\eta(x)-h,\ \ h^{-}\le h\le h^{+}, x\in R^{(1)}$, однак він значно гірший за якістю, ніж наближення, отримані за формулою (7) через наявність інтегралу з повільно спадаючим ядром Пуассона.

Розв'язки рівнянь (5-8) залежать від апріорі невідомої *середньої глибини* до контакту h (що, до речі, є наслідком модельних зображень складних середовищ, а не принциповою характеристикою задачі). Її значення з геологічних міркувань не завжди відомі надійно, тому важливо розробити спосіб знаходження контакту, у якому було б усунуто подібну параметричну залежність. Цього можна досягнути шляхом введення нових узагальнених співвідношень для контакту

$$\zeta(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{\zeta(x)}{\zeta^2(x)+(\xi-x)^2}\zeta(\xi,x)d\xi=u(x),\ \zeta(\xi,x)=\zeta(\xi)-\zeta(x), \tag{9}$$

$$\frac{1}{4\zeta(x)}\int_{c_1}^{c_2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta(x)}\right)^{-1}\zeta(\xi,x)d\xi=w(x,\zeta(x)), \tag{10}$$

де $$w(x,\zeta(x))=u(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{c_0}^{c_3}\frac{2k\zeta(x)}{(2k\zeta(x))^2+(\xi-x)^2}u(\xi)d\xi\,,$$

Подібна заміна справедлива й для рівнянь (7) і (8). Практична значимість цих виразів полягає в можливості отримувати значення глибин контакту в кожній фіксованій точці рівномірної мережі в ході ітераційного поліпшення моделі, що надійніше, ніж підстановка апріорних значень h. Співвідношення (5-6, 9-10) цілком працездатні й у випадку магнітоактивних контактів, коли в їхніх правих частинах стоятимуть похідні напруженості магнітного потенціалу; контакт відновлюють із системи спряжених рівнянь типу (7) як суму значень

$$u(x,-h)=S^{+}(x,h)+S^{-}(x,h);\ u(x,h)=S^{+}(x,h)-S^{-}(x,h).$$

Ця обставина відкриває перспективи для комплексної інтерпретації гравімагнітних полів і вимагає ретельнішого вивчення.

Питання розв'язності рівняння (5) досліджував Б.А. Андрєєв. Для його розв'язання він запропонував спосіб послідовних наближень [13], а М.М. Лаврентьєв [14] обґрунтував його застосовність для розв'язку операторних рівнянь першого роду[2]. Згодом розв'язність рівнянь (5) і (9) вивчалась в роботі [3], в якій для їх розв'язання було запропоновано так звані ітераційні процеси Лаврентьєва-Андрєєва

$$\zeta_{n+1}^{(1)}(x)=\zeta_n^{(1)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\zeta_n^{(1)}(\xi)d\xi+v(x),\ \zeta_0^{(1)}(x)=v(x)\ , \tag{11}$$

$$\zeta_{n+1}^{(1)}(x)=\zeta_n^{(1)}(x)-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_3}\frac{\zeta_n^{(1)}(x)}{\left(\zeta_n^{(1)}(x)\right)^2+(\xi-x)^2}\zeta_n^{(1)}(\xi)d\xi+u(x),\zeta_0^{(1)}(x)=u(x) \tag{12}$$

Розв'язність рівнянь (6, 10) вперше дослідив А.В. Чорний [3]; для обчислення їх розв'язків згодом введено нові ітераційні процеси, названі процесами Лаврентьєва-Чорного

$$\zeta_{n+1}^{(2)}(x)=\zeta_n^{(2)}(x)-\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2h}\right)^{-1}\zeta_n^{(2)}(\xi)d\xi+w(x),\quad \zeta_0^{(0)}(x)=w(x), n=0,1,2,\ldots,\infty \tag{13}$$

$$\zeta_{n+1}^{(2)}(x)=\zeta_n^{(2)}(x)-\frac{1}{4h}\int_{c_1}^{c_2}\left(\operatorname{ch}\frac{\pi(\xi-x)}{2\zeta_n^{(2)}(x)}\right)^{-1}\zeta_n^{(2)}(\xi)d\xi+w^{(n)}(x),\quad \zeta_0^{(0)}(x)=u(x), n=0,1,2,\ldots,\infty \tag{14}$$

$$w^{(n)}(x)=u(x)+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\int_{c_0}^{c_3}\frac{2k\zeta_n^{(2)}(x)}{\left(2k\zeta_n^{(2)}(x)\right)^2+(\xi-x)^2}u(\xi)d\xi$$

---

2 Ці обставини відбито у назві наведених нижче ітераційних процесів.

Дослідження збіжності цих процесів здійснюється елементарними засобами (методом індукції за умови збіжності мажоруючих часткових сум) внаслідок еквівалентного подання розв'язків через наступні наближення:

$$\zeta_n^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{c_2}v(\xi)d\xi\int_0^k\sum_{k=0}^{n}\left(1-e^{-\omega h}\right)^k\cos\omega(\xi-x)d\omega\,, \tag{15}$$

$$\zeta_n^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{c_1}^{c_2}w(\xi)d\xi\int_0^k\sum_{k=0}^{n}\left(1-(2\mathrm{ch}\omega h)^{-1}\right)^k\cos\omega(\xi-x)d\omega,\ n=\overline{0,\infty} \tag{16}$$

Твердження про збіжність цих наближень водночас, згідно пропозиції [15], є конструктивними теоремами існування розв'язків рівнянь (5) і (9); аналогічні співвідношення, лише складніші в плані чисельної реалізації, виведено для узагальнених рівнянь (6) і (10). Вивчення питання про швидкість збіжності різних ітераційних алгоритмів[3] для рівнянь (15) і (16) дозволяє дійти висновку, що послідовні наближення Лаврентьєва-Андрєєва $\left\{\zeta_n^{(1)}(x)\right\}$ і Лаврентьєва-Чорного $\left\{\zeta_n^{(2)}(x)\right\}$ рівномірно збігаються до граничної функції $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$, яка задовільняє кожному з двох еквівалентних рівнянь (5) і (9) зі швидкістю геометричної прогресії, оцінюваної , відповідно, величинами

$$\left|\zeta_{n+1}^{(1)}(x)-\zeta_n^{(1)}(x)\right|\le\frac{M(h)}{h(n+2)};\ \left|\zeta_{n+1}^{(2)}(x)-\zeta_n^{(2)}(x)\right|\le\frac{2M(h)}{h(n+2)},$$

а модулі неперервності зворотніх операторів цих рівнянь оцінюються як

$$\left|\zeta(x)-\zeta_n^{(1)}(x)\right|\le\frac{N^{(1)}(h)}{h(n+2)};\ \left|\zeta(x)-\zeta_n^{(2)}(x)\right|\le\frac{N^{(2)}(h)}{h(n+2)},$$

де $M(h)=2\max|\zeta(x)|;\ N^{(1)}(h)=2\max|v(x,2h)|;\ N^{(2)}(h)=2\max|w(x)+w(x,2h)|,\ x\in R^{(1)}$,а $v(x,2h)$ і $w(x,2h)$ – аналітично продовжені значення $v(x)$ і $w(x)$ як гармонійних функцій з рівня $y=0$ на рівень $y=2h$. Схожий результат справедливий і для узагальнених рівнянь контакту.

Порівняння модулів неперервності для рівнянь (5) і (6) демонструє зворотну пропорційність швидкості збіжності ітерацій до глибини *h* і майже однаковий її порядок для обидвох процесів за невеликої (усього вдвічі) переваги у швидкості збіжності процесу (13) над процесом (11). В обох процесах швидкість спадає з наростанням глибини *h* й індексу ітерації *n*, але практично ітераційний процес Лаврентьєва-Чорного має перевагу над “андрєєвським”: завдяки швидкому згасанню по горизонталі ядер перетворень (13) для відновлення наближень $S(x,h)$ з *визначеною точністю* можна обмежитись значеннями поля $u(x)$ на істотно коротших профілях, ніж при використанні будь-яких схем з ядром Пуассона. Одначе, останніми за певних умов можна користуватись, якщо істотно прискорити їхню збіжність.

У процесі вивчення питань можливості розв'язання рівнянь (5) і (9) попутно було поліпшено формули, що уточнюють наближення Нумерова (1), отримані колись Б.А. Андрєєвим [13], М.Р. Малкіним, А.К. Сеньком і А.К. Маловичком [16-18]. Реального поліпшення ітерацій Б.А. Андрєєва можна домогтися, якщо лінеаризоване наближення розв'язку нелінійного інтегрального рівняння для контакту $\zeta(x)\in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi)$ апроксимувати виразом

$$\zeta^{(n)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+2}^{k+1}\int_{c_0}^{c_3}\frac{kh}{(kh)^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,0)-u(x,0)\right]d\xi \tag{17}$$

який від істинного ухиляється не більш, ніж на величину $h^{-2}\omega^2(\xi)$ при $h\to\infty$.

Широко вживані в практиці аналітичного продовження формули Нумерова, Хьюза, Страхова є *частковими випадками* формули (17). Дійсно, якщо брати за нульове наближення вираз

---

[3] Відсутність таких даних заважала оцінці їх чисельної ефективності і можливості порівняння різних алгоритмів з метою вибору оптимального для розв'язуваної задачі.

$$\zeta_0(x)=\frac{1}{2\pi}\left\{u(x,0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\left[u(\xi,h)-u(x,h)\right]d\xi\right\}, \tag{18}$$

де h – відстань до найближчої особливості поля $u(x,0)$, неважко отримати для індексів $n=0,1,2$ наближення Б.В. Нумерова [5], Д. Х`юза [18], та В.М. Страхова [19], відповідно,

$$\zeta^{(0)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta u(\xi,x)d\xi,\quad \Delta u(\xi,x)=\left[u(\xi,0)-u(x,0)\right],$$

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{3h}{h^2+(\xi-x)^2}-\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi,x)d\xi\ , \tag{19}$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{6\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}-4\frac{2h}{(2h)^2+(\xi-x)^2}+\frac{3h}{(3h)^2+(\xi-x)^2}\right\}\Delta u(\xi,x)d\xi$$

Ядра цих перетворень додатні, а ядро для n = 4 – уже ні, що призводить до осциляції розв’язку, тому в практичних обчисленнях варто обмежитися для знаходження контакту однією з наступних наближених формул

$$\zeta^{(1)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{\left[10h^2+(\xi-x)^2\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u d\xi,\ \ \Delta u=u(\xi)-u(x)$$

$$\zeta^{(2)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{\left[156h^4+13h^2(\xi-x)^2+(\xi-x)^4\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u d\xi, \tag{20}$$

$$\zeta^{(3)}(x,h)=u(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{\left[3696h^6+124h^4(\xi-x)^2+29h^2(\xi-x)^4+(\xi-x)^6\right]h}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]\left[(2h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(3h)^2+(\xi-x)^2\right]\left[(4h)^2+(\xi-x)^2\right]}\Delta u d\xi\ .$$

Суть пропозицій М.Р. Малкіна й А. К. Сенька стосовно до постановки задачі (2-5), які уточнюють розв’язок рівняння типу (5), зводиться до наступного. Малкін запропонував уточнювати кожне з лінеаризованих наближень (20) контакту $\zeta^{(n)}(x,h)$ за наступною схемою $\zeta_1^{(n)}(x,h)=\zeta^{(n)}(x,h)+\Delta\zeta(x,h)$, в якій ми пропонуємо за величину поправки брати

$$\Delta\zeta(x,h)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{h^2-(\xi-x)^2}{\left[h^2+(\xi-x)^2\right]^2}\left[\zeta(\xi,h)-\zeta(x,h)\right]^2 d\xi,.$$

Ця поправка підвищує точність кожного з наступних наближень на порядок щодо початкових – аж до величини $h^3\omega^{-3}(\eta)$. А.К. Сенько для уточнення кожного з лінеаризованих наближень (20) розв’язку $\zeta^{(n)}(x,h)$ нелінійного рівняння для контакту (1) запропонував наступну послідовну схему $\zeta_1^{(k)}(x,h)=\sqrt{\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2+\Delta\zeta(x)}$, $k=0,1,2,3,...$; Якщо поправку $\Delta\zeta(x)$ знаходити як розв’язок наступного лінійного інтегрального рівняння 1-го роду

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{\Delta\zeta(\xi)}{\left[\zeta^{(n)}(x,h)\right]^2+(\xi-x)^2}d\zeta=v(x),$$

$$v(x)=u(x)-\zeta^{(k)}(x,h)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\ln\frac{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(x,h)\right]^2}{(\xi-x)^2+\left[\zeta^{(k)}(\xi,h)\right]^2}d\xi$$

то ітерації будуть генерувати наближення*, що* ухиляються від точного розв’язку не більше, ніж на величину $\zeta_0^2/\left(h^+\right)^3, \zeta_0=\max\limits_x\left|\Delta\zeta(x)\right|$. А.К. Маловичко [18] запропонував природнє узагальнення ітерацій Б.В. Нумерова й А.К. Сенька для уточнення контакту, яке на підставі ітераційного процесу (11) нам вдалося удосконалити. Пропонується новий спосіб послідовних уточнень контакту за схемою $\zeta_{n+1}(x,h)=\zeta_n(x,h)+\Delta\zeta_n(x,h), h^-\le h\le h^+$, у вигляді процесу

$$\Delta\zeta_n^{(m+1)}(x,h)=\Delta\zeta_n^{(0)}(x)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{c_0}^{c_3}\frac{h}{h^2+(\xi-x)^2}\Delta\zeta_n^{(m)}(\xi,h)+\Delta\zeta_n^{(m)}(x,h)\ , \tag{21}$$

де $\Delta\zeta_n^{(0)}(x) = U(x) - \zeta_n(x,h) + \frac{1}{2\pi}\int_{c_0}^{c_3} \ln\frac{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(x,h)}{(\xi - x)^2 + \zeta_n^2(\xi,h)} d\xi, \quad m = \overline{0,\infty}, \; n = \overline{0,\infty},$

$$\zeta_0(x) = \zeta^{(k)}(x,h), k = 0,1,2,3...,h^- \le h \le h^+.$$

За умови $\zeta(x) \in Nu^{(1,\alpha)}(1,\Pi), x \in R^{(1)}$ послідовні наближення, генеровані процесом ітерацій (21), збігаються при $n \to \infty$ до граничної функції $\zeta(x)$ зі швидкістю геометричної прогресії, отже, існують.

Висновок. Точність обчислень контакту залежить не лише від похибок поля δ, але і від довжини інтервалу його задання; за *однакової точності* обчислень у випадку задання значень $v(x)$ на короткому інтервалі для відновлення їх за допомогою операторів зі швидко спадаючими ядрами потрібний менший обсяг інформації, ніж у випадку задання поля на нескінченних профілях. Строге обґрунтування запропонованих методів відновлення контакту при обмеженому профілі вимірів дозволяє рекомендувати їх для автоматизованої інтерпретації даних гравіметрії в маловивчених районах.

Виношу глибоку подяку В.І. Старостенку і А.В. Чорному за критичні зауваження, які поспріяли поліпшенню й глибшому розумінню матеріалу цієї статті.

Список літератури

1. *Старостенко В.И., Заворотько А.Н.* Решение обратных задач гравиметрии для нескольких контактных поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1982, № 3. – С. 46-61.
2. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – Киев: Наукова думка, 1978. – 228 с.
3. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В*. Обратная задача теории логарифмиского потенциала для контактной поверхности // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. – К.: Наук. думка, 1992. – С. 230-236.
4. *Старостенко В.И., Черная Н.Н., Черный А.В*. Обратная задача гравиметрии для контактной поверхности ч. I-III. // Физика Земли. – 1992. №6. – С. 48-58; – 1993. – №7. – С.47-56; – 1993. – №7. – С.57-66.
5. *Нумеров Б.В*. Интерпретация гравитационных наблюдений в случае одной контактной поверхности // ДАН СССР. – 1930. – №21. – С. 569-574.
6. *Шванк О.А., Люстих Е.Н.* Интерпретация гравитационных наблюдений. – М.-Л.: Гостоптехиздат, 1947. – 400 с.
7. *Чорний А.В., Дубовенко Ю.І.* Дослідження оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // Геофіз. журнал. – 2002. – 24, №3. – С. 77-92.
8. *Чорний А.В., Дубовенко Ю.І.* До теорії структурної задачі гравіметрії в комплексній площині // ДАН України. – 2002. – № 4. – С. 145-149.
9. *Черная Н.Н.* Исследование обратной задачи логарифмического потенциала для контактной поверхности: Дис. .. канд. физ.-мат.наук: – Киев, Ин-т геофизики АН УРСР. – 1990. – 175 с.
10. *Старостенко В.И., Кислинская О.А.* Интеграл Шварца для полосы и его приложения в геофизике // ДАН УРСР. Сер. Б. – 1993. – № 10. – С. 126-129.
11. *Старостенко В.І., Чорна Н.Н., Чорний А.В.* Лінеаризована постановка оберненої задачі потенціалу для контактної поверхні // ДАН УРСР. Сер. Б. – 1988. – № 7. – С. 17-20.
12. *Черная Н.Н.* Конечномерная аппроксимация регуляризующих алгоритмов решения обратной задачи для контактной границы // Геофиз. журнал. – 2001. – 23, № 6. – С. 105-118.
13. *Андреев Б.А.* Расчеты пространственного распределения потенциальных полей и их использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. – 1947. – №1. – С 79-92; – 1949. – №3. – С. 256-267; – 1952. – №2. – С. 1-30; – 1954. – №1. – С. 49-64.
14. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосиб.: Изд. СО АН СССР, 1962. – 92 с.
15. *Маслов В.П.* Регуляризация некорректных задач для сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. – 1967. – 176, №5. – С. 1012-1014.
16. *Малкин Н.Р.* О решении обратной магнитометрической задачи для случая одной контактной поверхности при пластообразном залегании масс // ДАН СССР. – 1931. – А, №9. – С. 231-235.
17. *Сенько А.К.* К интерпретации гравитационных наблюдений по методу интегральных уравнений // Бюлл. нефт. геофиз. – М.-Л.: ОНТИ, 1936. – Вып. 3. – С. 151-152.
18. *Маловичко А.К.* Об определении контактной поверхности по гравитационным аномалиям // Прикл. геофизика. – 1948. – 5. – С. 77-97.
19. *Страхов В.Н.* Об обратной задаче потенциала для контактной поверхности // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. – 1974. – № 2. – С. 43-65.